8mm

"BEIFA" is awarded thetitles of National Celebrated Export Commodity To Be Given Special Support, National Celebrated Produt In Writing Instrument Manufacturing Industry, Provincial Celebrated Product In Zhejiang Province, Provincial

北京2008年奥运会
文具独家供应商

BEIFA
贝发文具 金牌品质

B5

NOTEBOOK

多元微积分

第1章 多元函数及其微分学

n维欧氏空间：$R^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\mid x_i\in R,\ i=1,2,\dots,n\}$

对加法和数乘运算，R^n是实数域上的线性空间.

欧氏距离：$\|X-Y\|_n=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$：正定性、对称性、三角不等式；

n元函数：设$\Omega\subset R^n$，若对于任意的点$X\in\Omega$，存在唯一的数值$u\in R^1$

与之对应，对应法则为一个n元函数：$f:\Omega\subset R^n\to R^1$ $X\mapsto u$.

eg $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x,y)\in D\subset R^2$.

eg. 隐式表示 $F(x_1,x_2,\dots,x_n,u)=0$. (在某些条件下)

$R^n\to R^m$的向量值函数：设$\Omega\subset R^n$，若对于任意的$X\in\Omega$，存在唯一$Y\in R^m$

与之对应，对应法则为从Ω到R^m的一个向量值函数.

$f:\Omega\subset R^n\to R^m$ $X\mapsto Y$. 其中每个分量y_j $(j=1,2,\dots,m)$都是

$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$的n元函数：$y_j=f_j(x_1,x_2,\dots,x_n)$，$(x_1,\dots,x_n)\in\Omega$.

eg $\begin{cases}x=R\sin u\cos v & u\in[0,\pi]\\ y=R\sin u\sin v & v\in[0,2\pi)\\ z=R\cos u\end{cases}$ $R^2\to R^3$.

向量值函数的极限：$\lim\limits_{X\to X_0}f(X)=A$ $(A\in R^m)$：

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall X\in\Omega\wedge 0<\|X-X_0\|_n<\delta\Rightarrow\|f(X)-A\|_m<\varepsilon$.

$\Leftrightarrow\lim\limits_{X\to X_0}f_j(X)=a_j$，$j=1,2,\dots,m$.

$\begin{cases}\text{证明极限不存在：极限不同之反例.}\\ \text{证明极限存在：利用}\varepsilon-\delta\text{通过不等式证明.}\end{cases}$

向量值函数的连续性：$f(X)$在X_0点连续.

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall X:\|X-X_0\|_n<\delta\Rightarrow\|f(X)-f(X_0)\|_m<\varepsilon$.

No.

Date

定理：连续向量值函数的加、减、数乘与复合均是连续的。
连续向量值函数的最值定理和介值定理。

k阶无穷小函数：$\rho^k = \|X-X_0\|^k$，若 $\lim_{X\to X_0} \frac{f(X)}{\rho^k} = const$，$f(X)$ 为 k阶……

eg. $f(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = O(\rho^2)$.

n元函数的全微分：$u=f(X)$ 在球域 $B(X_0, r)$ 有定义，
$\forall X \in B(X_0, r)$，$\Delta u = f(X) - f(X_0) = \underbrace{a_1(x_1 - x_1^{(0)}) + \cdots + a_n(x_n - x_n^{(0)})}_{\text{全微分}} + o(\rho)$
则 u 在 X_0 处可微，其中 $o(\rho)$ 为 ρ 的高阶无穷小

$X - X_0 \to 0$ 时，$f(X) \to f(X_0)$，故可微函数（在 X_0）必连续（在 X_0）。

由全微分的定义，若n元函数 $u=f(X)$ 在 X_0 处可微，则其 n 个偏导数
$\frac{\partial u}{\partial x_1}(X_0)$ … $\frac{\partial u}{\partial x_n}(X_0)$ 均存在，且 $a_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_0)$

上命题的逆命题不成立。

由全微分的定义，若 u 在 X_0 的各偏导数存在，当 $\Delta u - \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 - \cdots - \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n$
是 ρ 的高阶无穷小时，u 在 X_0 可微，反之不可微。

判断可微的一个充分条件：若 u 在 X_0 的各偏导数连续则 u 在 X_0 可微

n元函数的方向导数：$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0} = \lim_{\substack{P\to P_0 \\ P\in l}} \frac{f(P)-f(P_0)}{\|P-P_0\|}$

其中 $l^0 = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2 \cdots \cos\alpha_n)$，若 u 在 X_0 可微，则
$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{P_0}\cos\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{P_0}\cos\alpha_n$ （可微 ⇒ 方向导数存在

No.
Date

n元函数的梯度：u在X_0点取到最大方向导数·该方向单位向量.
(可微 ⇒ 存在梯度)

$$\text{grad}\, u(X_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$ ← $(x_1, \cdots, x_n) : R^n \to R^n$向量值函数.

定理：$u = f(X)$在Ω上的k阶偏导数连续（u在Ω上k阶连续可微）
则u的r阶混合偏导数（$2 \le r \le k$）与求导顺序无关.

n元函数的高阶微分：$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^k = D^k u$
D：线性算子.

向量值函数的微分：$\Delta f = f(X_0 + \Delta X) - f(X_0) = A\Delta X + o(\|\Delta X\|)$.
$A\Delta X$：$f(X)$在X_0的全微分$df(X_0)$；$o(\|\Delta X\|)$是$\|X - X_0\|$的高阶无穷小.

向量值函数在X_0可微 ⇔ 每个分量（多元）函数在X_0可微. 其中

$$A = J(f(X_0)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{X_0} = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{bmatrix}_{X_0}$$

$$= \left.\frac{\partial(f_1 \cdots f_m)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}\right|_{X_0}$$

复合向量值函数的微分：若$U = g(X)$在X_0可微，$Y = f(U)$在$U_0 = g(X_0)$可微，则$f \circ g$在X_0可微. $d(f\circ g)(X_0) = J[f(U_0)] \cdot J[g(X_0)]$. 即

$$J[f \circ g(X_0)] = J[f(U_0)] \cdot J[g(X_0)].$$

eg. $y = f(u_1, u_2, \cdots, u_m)$，$u_j = g_j(x_1, \cdots, x_n)$，$j = 1, \cdots, m$.
则 $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}$ $\quad i = 1, \cdots, n$.

No.

Date

隐函数(多元函数 or 向量值函数)的存在性:

1. $n+1$ 元函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ 在点 (X_0, y_0) 的某邻域 $B((X_0, y_0), r)$ 内 k 阶连续可微,且 $F(X_0, y_0)=0$,$\frac{\partial F}{\partial y}(X_0, y_0)\neq 0$,则确定 n 元隐函数 $y=f(X)$,$F(X, f(X))=0$,该函数 k 阶连续可微.

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(X, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(X, y)} \quad i=1,2,\cdots,n.$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(X, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(X, y)}\right]$$

其中 $\frac{\partial F}{\partial x_i}(X, y(X))$ 是 $\frac{\partial F}{\partial x_i}(X, y)$ 与 $y=y(X)$ 的复合函数.

eg. $F(x, y, z)=0$,隐函数 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微.则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x,y))}\right]$$

$$= -\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x,y))\right]\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x,y)) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x,y))\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x,y))\right]}{\left[\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x,y))\right]^2}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x,y))\right] = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot 0 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\cdot 1 + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$

$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x,y))\right] = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\cdot 0 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\cdot 1 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3}.$$

2. m 个 $n+m$ 元函数 $F_j(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ $(j=1,2,\cdots,m)$ 在点 $P_0(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \cdots, y_m^{(0)})$ 的某邻域 $B(P_0, r)$ 内连续可微,且 $F_j(P_0)=0$,矩阵 $\left.\frac{\partial(F_1, \cdots, F_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)}\right|_{P_0}$ 可逆,则确定了向量值函数 $(n\to m)$ $F_j(X, Y)=0$,$Y=f(X)$,

No.

Date

该函数连续可微.

$$J(f(x)) = \frac{\partial(y_1, \cdots, y_m)}{\partial(x_1, \cdots x_n)} = -\left(\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\right)^{-1} \frac{\partial(F_1, \cdots, F_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}.$$

设 $Y = f(X)$ 为 $\Omega \subset R^n \to R^n$ 的连续可微向量值函数, 在 $X_0 \in \Omega$ 处的 Jacobi 矩阵 $J(f(X_0))$ 可逆, 则 f 在 $B(X_0, \delta)$ 可逆, 逆向量值函数 $X = g(Y)$ 仍连续可微. $J(g(Y)) = [J(f(X))]^{-1}$

eg. 满秩方阵构成的线性方程组.

曲面的显函数表示法: $S: \ z = f(x, y), \ (x, y) \in D_{xy} \subset R^2$.

切平面: $z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$. 全微分

法向量: $n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)\Big|_{P_0}$.

法线方程: $\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$.

曲面的参数表示法: $S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D_{uv} \subset R^2$;

切平面 $\begin{cases} x - x_0 = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)(v - v_0) \\ y - y_0 = \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)(v - v_0) \\ z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)(v - v_0) \end{cases}$ 全微分

法向量 (与上述切线都垂直): $n = \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)\Big|_{(u_0, v_0)}$

法线方程 $\frac{x - x_0}{\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\Big|_{(u_0, v_0)}} = \frac{y - y_0}{\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\Big|_{(u_0, v_0)}} = \frac{z - z_0}{\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\Big|_{(u_0, v_0)}}$

No.

Date

曲面的隐函数表示法：$S: F(x,y,z)=0$.

全微分

切平面：$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{P_0}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{P_0}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{P_0}(z-z_0)=0$

法向量：$n=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_{P_0}$.

法线方程：$\dfrac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}\big|_{P_0}}=\dfrac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}\big|_{P_0}}=\dfrac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}\big|_{P_0}}$.

空间曲线的参数表示法 $L:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$.

切线：$\begin{cases}x-x_0=x'(t_0)(t-t_0)\\ \vdots\\ z-z_0=z'(t_0)(t-t_0)\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$.

法平面：$(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)^T=0$.

空间曲线的隐函数表示法. $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0.\end{cases}$

两曲面在 P_0 的切平面. $\frac{\partial F_1}{\partial x}\Big|_{P_0}(x-x_0)+\frac{\partial F_1}{\partial y}\Big|_{P_0}(y-y_0)+\frac{\partial F_1}{\partial z}\Big|_{P_0}(z-z_0)=0$.

$\frac{\partial F_2}{\partial x}\Big|_{P_0}(x-x_0)+\frac{\partial F_2}{\partial y}\Big|_{P_0}(y-y_0)+\frac{\partial F_2}{\partial z}\Big|_{P_0}(z-z_0)=0$

两切平面的交线就是切线~~方~~：$T=\left(\frac{\partial F_1}{\partial x},\frac{\partial F_1}{\partial y},\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\Big|_{P_0}\times\left(\frac{\partial F_2}{\partial x},\frac{\partial F_2}{\partial y},\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\Big|_{P_0}$.

利用切方向可写出切线的点斜式方程.

No.

Date

带 Peano 余项的 n 元函数的二阶 Taylor 公式：

$$f(X) = f(X_0) + J(f(X_0))\Delta X + \frac{1}{2!}(\Delta X)^T H(X_0)\Delta X + o(\|\Delta X\|^2).$$

n元函数

极值点的必要条件：f 在 X_0 可微（存在各偏导数），若 X_0 是 f 的一个极大(小)值点，则 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)=0 \Leftrightarrow \nabla f(X_0)=\vec{0}$.

若 f 在 $B(X_0, \delta)$ 二阶连续可微，X_0 为极值点

$$\begin{cases} 若\ H(X_0) 正定，X_0 是 f 极小值点 \\ 若\ H(X_0) 负定，X_0 是 f 极大值点. \end{cases}$$

eg. 求 $u=f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+6xy+2z$ 的极值点

由 $u'_x=u'_y=u'_z=0$ 得两个极值点 $P_1(6,-18,-1)$、$P_2(0,0,-1)$

而 $H(P_1)=\begin{bmatrix}36&6&0\\6&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 正定，$H(P_2)=\begin{bmatrix}0&6&0\\6&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 不定

∴ P_1 是极小值点。P_2 不是极值点

条件极值问题：$\begin{cases}\min(\max)\ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) & 目标函数(n元). \\ \varphi(x_1, x_2 \cdots x_n)=0 & 约束条件.\end{cases}$

定理：条件极值问题在 Ω 中的极值点是 Lagrange 函数

$L(x_1, x_2 \cdots, x_n, \lambda) = f(x_1, \cdots, x_n) + \lambda\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 的极值点.

if f、φ 连续可微且 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ $(i=1,\cdots,n)$ 不全为零.

所以，由 Lagrange 函数求出极值点后代入目标函数后比较大小即得解.

No.

Date

eg 空间椭圆 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ lx+my+nz=0 \end{cases}$ $(l^2+m^2+n^2=1)$ 的长、短半轴的长度

目标函数　min(max)　$x^2+y^2+z^2$

约束条件：　前两式.

Lagrange函数：　$L=x^2+y^2+z^2+\lambda_1\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+\lambda_2(lx+my+nz)$.

必要条件：　$L_x'=2x+\lambda_1\frac{2x}{a^2}+\lambda_2 l=0$

$L_y'=2y+\lambda_1\frac{2y}{b^2}+\lambda_2 m=0$

$L_z'=2z+\lambda_1\frac{2z}{c^2}+\lambda_2 n=0$

代入约束条件得　$a^*=\left(\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$，$b^*=\left(\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$

其中 $A=a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2$，$B=\frac{1}{2}[l^2a^2(b^2+c^2)+m^2b^2(c^2+a^2)+n^2c^2(a^2+b^2)]$，$C=a^2b^2c^2$

第二章 含参变量积分

定义： $I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx \quad y\in[c,d]$.

连续性： $f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则 $I(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续.

换序性： $f(x,y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则 $\forall y_0\in(c,d)$

$$\left[\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx\right]_{y=y_0}=\int_a^b\left[\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right]_{y=y_0}dx.$$

Leibniz公式： $f(x,y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，$\alpha(y)$、$\beta(y)$ 在 $[c,d]$ 上可微、有界，则

$$\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx+f(\beta(y),y)\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\alpha'(y).$$

换序性*： $f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

对于广义含参积分，只需加上一致收敛的条件就可用上面定理

eg 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx \quad (b\geq a>0)$.

由 $\int_a^b e^{-xy}\,dy=\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ 得 原式 $=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}\,dy$

$a\leq y\leq b$ 时 $|e^{-xy}|\leq e^{-ax}$ 故 $\int_a^b e^{-xy}\,dx$ 在 $y\in[a,b]$ 上一致收敛，故

原式 $=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}\,dx=\ln\frac{b}{a}$.

No.

Date

第3章 重积分

m元有界函数$f(x_1\cdots x_m)$在R^m中的有界区域Ω上的m重积分：

$$\int_{\Omega}\cdots\int f(x_1\cdots x_m)\,dx_1\cdots dx_m.$$

定理：f是有界闭区域Ω上的连续函数，则f在Ω上Riemann可积。

二重积分的变量代换法：$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|du\,dv$

eg 极坐标下 $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}$ $(\rho\geq 0,\ 0\leq\varphi<2\pi)$. $d\sigma=dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi$.

三重积分的累次积分法：$M(\Omega)=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dV=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\rho(x,y,z)\,dz.$

三重积分的变量代换法：$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV=\iiint_{\Omega^*} f(x(r,s,t),y(r,s,t),z(r,s,t))\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,s,t)}\right|dr\,ds\,dt$

eg 柱坐标下 $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$ $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)}=\rho.$

eg 球坐标下 $\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$ $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}=-r^2\sin\theta$ $\begin{cases}r\geq 0\\ 0\leq\varphi<2\pi\\ 0\leq\theta\leq\pi.\end{cases}$

eg R^n中单位球$\Omega_n=\{(x_1,\cdots x_n)\mid\sum_{i=1}^n x_i^2\leq 1\}$的体积$V_n$.

$V_n=\int_{\Omega_n}\cdots\int dV=\int_{-1}^1 dx_n\int_{\Omega_{n-1}}\cdots\int dx_1\cdots dx_{n-1}$ $\quad\Omega_{n-1}=\{(x_1\cdots x_{n-1})\mid x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2<1-x_n^2\}$

作变量代换 $x_1=\sqrt{1-x_n^2}\,u_1,\cdots,x_{n-1}=\sqrt{1-x_n^2}\,u_{n-1}$, $\Omega_{n-1}^*=\{(u_1\cdots u_{n-1})\mid u_1^2+\cdots+u_{n-1}^2\leq 1\}$

且 $\frac{D(x_1\cdots x_{n-1})}{D(u_1,\cdots u_{n-1})}=(\sqrt{1-x_n^2})^{n-1}$ $\quad\therefore V_n=\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x_n^2})^{n-1}dx_n\int_{\Omega_{n-1}^*}\cdots\int du_1\cdots du_{n-1}$

No.

Date . .

即 $V_n = V_{n-1}\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-t^2})^{n-1}dt = V_{n-1}\cdot B(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2})$

$\therefore\ V_n = \dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}\sqrt{\pi}\,V_{n-1}.$

$\therefore\ V_{2m} = \dfrac{\pi^m}{m!}$, $V_{2m-1} = \dfrac{2^m\pi^{m-1}}{(2m-1)!!}$.

No.

Date . .

第4章 第一类曲线积分与第一类曲面积分

第一类曲线积分: $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\,dl = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y,z)\,dl$.

$$\int_L f(x,y,z)\,dl = \int_{L_1} f(x,y,z)\,dl + \int_{L_2} f(x,y,z)\,dl$$

$$\int_L f(x,y,z)\,dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$$

第一类曲面积分: 若曲面S的方程为参数形式

$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ 则曲面上每点法向量为 $\left(A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right)$

则 $|\cos(\vec{n},z)| = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $ds = \dfrac{dx\,dy}{|\cos(\vec{n},z)|} = \dfrac{1}{\cos(\vec{n},z)} \cdot \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\,du\,dv = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$

而 $A^2+B^2+C^2 = EG-F^2$, 其中 $E = 1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2$, $G = 1+(\frac{\partial z}{\partial y})^2$, $F = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$.

$\therefore ds = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$.

$\therefore \iint_S f(x,y,z)\,ds = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$.

eg $\iint_S f(x,y,z)\,ds = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dx\,dy$

eg 球面的面积元素 $ds = \sqrt{EG-F^2}\,d\varphi\,d\theta = r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta$.

No.

Date

第5章 第二类曲线积分与第二类曲面积分

第二类曲线积分：$\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{L(B)}^{(A)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$、路径可加性.

参数形式：$\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int_\alpha^\beta X\cdot x'(t)\,dt + \int_\alpha^\beta Y\cdot y'(t)\,dt + \int_\alpha^\beta Z\cdot z'(t)\,dt$.

转化为第一类曲线积分：$\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{AB} (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\,dl$

第二类曲面积分 $\iint_{S^+} \vec{V}\cdot d\vec{S} = \iint_S (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\,dS$. 注意 $d\vec{S}$ 方向影响 $\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma$ 正负性.

性质：$\iint_{S^-} \vec{V}\,d\vec{S} = -\iint_{S^+} \vec{V}\cdot d\vec{S}$、曲面可加性.

参数形式：$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $(u,v)\in D_{uv}$.

当 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ 时，单位法向量 $\vec{n} = \pm\dfrac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|} = \pm\dfrac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

且 $dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$

$\therefore$ $dy\wedge dz = \cos\alpha\,dS = \pm A\,du\,dv$

$dz\wedge dx = \cos\beta\,dS = \pm B\,du\,dv$

$dx\wedge dy = \cos\gamma\,dS = \pm C\,du\,dv$

$\therefore$ $\iint_{S^+} \vec{V}\cdot d\vec{S} = \pm\iint_{D_{uv}} (XA + YB + ZC)\,du\,dv$. 正负号由一点定出即可.

Green公式：$\int_S \nabla\times\vec{V}\cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{V}\cdot d\vec{l}$ · 其中 $\nabla\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$

(stokes)

$\because \nabla\times\vec{V}=0$ 则第二类曲线积分 $\int \vec{V}\cdot d\vec{l}$ 与路径无关.

且 $\int_{A_1}^{A_2} \vec{V}\cdot d\vec{l} = u(X)\Big|_{A_1}^{A_2} = u(A_2)-u(A_1)$ ：原函数.

Gauss公式：$\int_\Omega \nabla\cdot\vec{F}\cdot dV = \oint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S}$ 其中 $\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$

定理：在一个单连通区域上，一个向量场 $\vec{V}=(X,Y,Z)$ 是梯度场的充要条件是存在函数 $u(x,y,z)$，使 $du = Xdx+Ydy+Zdz$

（即 $X=\frac{\partial u}{\partial x}$，$Y=\frac{\partial u}{\partial y}$，$Z=\frac{\partial u}{\partial z}$，$du=\nabla u\cdot d\vec{r}$），$u$ 为 $\vec{V}$ 的势函数

$\nabla = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$.

$\mathrm{div}\,\vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}f_x+\frac{\partial}{\partial y}f_y+\frac{\partial}{\partial z}f_z$.

$\mathrm{rot}\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$

$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\varphi\,\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\varphi\,\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\varphi\,\vec{e}_z$

定理：$\nabla\times\nabla\varphi\equiv 0$ ⇒ 无旋场必可表为标量场的梯度.

（连续可微）. $\nabla\cdot\nabla\times\vec{f}\equiv 0$ ⇒ 无源场必可表为另一矢量的旋度.

第6章 空间曲线与空间曲面

R^3中的向量：$\vec{r}(t)=(x(t), y(t), z(t))$，$t\in[a,b]$.

t_0处的微分：$d\vec{r}(t_0)=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)^T_{t_0} dt$.

t_0处的导数：$\dot{\vec{r}}(t_0)=(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$：$R^1\to R^3$的向量值函数.

性质：$\frac{d}{dt}(\vec{r_1}\times\vec{r_2})=\frac{d\vec{r_1}}{dt}\times\vec{r_2}+\vec{r_1}\times\frac{d\vec{r_2}}{dt}$

$\frac{d}{dt}(\vec{r_1}\ \vec{r_2}\ \vec{r_3})=\left(\frac{d\vec{r_1}}{dt}\ \vec{r_2}\ \vec{r_3}\right)+\left(\vec{r_1}, \frac{d\vec{r_2}}{dt}, \vec{r_3}\right)+\left(r_1\ r_2\ \frac{d\vec{r_3}}{dt}\right)$

其中 $(\vec{r_1}\ \vec{r_2}\ \vec{r_3})=\vec{r_1}\cdot(\vec{r_2}\times\vec{r_3})$.

$\vec{r}(t)$ n阶连续可微 $\Leftrightarrow$ $\vec{r}(t)$的每个分量 n阶连续可微.

向量函数的积分：$\int\vec{r}(t)dt=\vec{R}(t)+\vec{C}$

性质：$\int\vec{a}\cdot\vec{r}(t)dt=\vec{a}\cdot\int\vec{r}(t)dt$

$\int\vec{a}\times\vec{r}(t)dt=\vec{a}\times\int\vec{r}(t)dt$

曲线的弧长：$s=\int_a^b\|\dot{\vec{r}}(t)\|dt=\int_a^b\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt$

$\because \frac{ds}{dt}>0$，故$s(t)$的反函数$t=t(s)$存在，故以弧长为参的曲线方程

$\vec{r}=\vec{r}(s)=(x(s), y(s), z(s))$.

约定：$\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}$，$\vec{r}'=\frac{d\vec{r}}{ds}$

No.

Date

曲线的切向量：$\vec{T} = \vec{r}'(s_0) \quad \|\vec{T}\| = 1$

切线方程：$\vec{\rho} = \vec{r}(s_0) + \lambda\vec{T} = \vec{r}(s_0) + \lambda\vec{r}'(s_0)$.　一般参数 $\vec{T} = \dfrac{\dot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|}$.

法平面方程：$(\vec{\rho} - \vec{r}(s_0)) \cdot \vec{T} = (\vec{\rho} - \vec{r}(s_0))\, r'(s_0) = 0$.

单位副法线向量 $\vec{B} = \dfrac{\vec{r}'(s_0) \times \vec{r}''(s_0)}{\|\vec{r}''(s_0)\|}$

副法线方程：$\vec{\rho} = \vec{r}(s_0) + \lambda\vec{B}$　一般参数：$\vec{B} = \dfrac{\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)}{\|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)\|}$

密切平面方程：$(\vec{\rho} - \vec{r}(s_0)) \cdot \vec{B} = 0$.

单位主法线向量：$\vec{N} = \dfrac{\vec{r}''(s_0)}{\|\vec{r}''(s_0)\|}$.

主法线方程：$\vec{\rho} = \vec{r}(s_0) + \lambda\vec{N}$　一般参数：$\vec{N} = \dfrac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| \|\dot{\vec{r}}\|}$.

从切平面方程：$(\vec{\rho} - \vec{r}(s_0)) \cdot \vec{N} = 0$.

弗雷耐标架（自然坐标系）：$\{\vec{r}(s); \vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$

曲率：$k(s) = \|\vec{r}''(s)\|$　一般参数：$k(t) = \dfrac{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|^3}$

曲率半径：$R(s) = \dfrac{1}{k(s)}$.　$\vec{T}'(s) = k(s)\vec{N}(s)$.

曲率中心：$\vec{r}(s) + R(s)\vec{N}(s)$　$k(s) = \dfrac{d\theta}{ds}$.

挠率：$\tau(s) = -\vec{B}'(s) \cdot \vec{N}(s)$.　$|\tau(s)| = \left|\dfrac{d\varphi}{ds}\right|$.

一般参数：$\tau = \dfrac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})}{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})^2}$.

$\vec{B}' = -\tau\vec{N}$.

弗雷耐公式：
$$\begin{pmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

弧长参数 s、曲率 $k(s)$、挠率 $\tau(s)$ 是描述一条曲线的基本量

No.

Date

曲面的向量形式：$\vec{r}=\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$

u曲线：定v动u. v曲线：定u动v. $\Big\}$ 参数曲线网. $\Big\{$ u切向量：$\vec{r}_u=(x_u,y_u,z_u)$ v切向量：$\vec{r}_v=(x_v,y_v,z_v)$

参数变换：$\vec{r}_{\bar{u}}\times\vec{r}_{\bar{v}}=\frac{D(u,v)}{D(\bar{u},\bar{v})}(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)$. 由复合函数链式法则可证.

$\vec{r}_u,\vec{r}_v$：切空间的基.

法向量：$\vec{n}^0=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}$

切平面：$\vec{n}\cdot(\vec{\rho}-\vec{r})=0$. 参数方程：$\vec{\rho}=\vec{r}+\lambda\vec{r}_u+\mu\vec{r}_v$.

法线方程：$\vec{\rho}=\vec{r}+\lambda\vec{n}$

曲面的第一基本形式：$ds^2=d\vec{r}\cdot d\vec{r}=(\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv)^2=\vec{r}_u^2du^2+2\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v\,dudv+\vec{r}_v^2dv^2$

$$=(du,dv)\begin{bmatrix}E&F\\F&G\end{bmatrix}\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}.$$

第一基本形式与参数变换无关.

曲面上曲线的曲率：$k\vec{N}=k_n\vec{n}^0+k_g(\vec{n}^0\times\vec{T})$. k_n：法曲率，k_g：测地曲率

k：曲率

$$\therefore k_n=k\vec{N}\cdot\vec{n}^0=\vec{T}'\cdot\vec{n}^0=\vec{r}''\cdot\vec{n}^0$$
$$=(\vec{r}_u u'+\vec{r}_v v')'\cdot\vec{n}^0$$
$$=(\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}^0)u'^2+2\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}^0\,u'v'+(\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}^0)v'^2$$
$$=\frac{L\,du^2+2M\,dudv+N\,dv^2}{ds^2}$$
$$=\frac{(du,dv)\begin{bmatrix}L&M\\M&N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}du\\dv\end{bmatrix}}{(du,dv)\begin{bmatrix}E&F\\F&G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}du\\dv\end{bmatrix}}$$

$$\left(\begin{aligned}&L=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}_u\\&M=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}_v=-\vec{r}_v\cdot\vec{n}_u\\&N=-\vec{r}_v\cdot\vec{n}_v\\&k_n=-\frac{d\vec{r}\cdot d\vec{n}}{ds^2}\end{aligned}\right)$$